Devoir surveillé n° 5 concours blanc - Correction

Exercice 1.

Partie I - Questions préliminaires

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On se place dans $E = \mathbb{R}_n[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On confondra de façon usuelle un polynôme avec sa fonction polynomiale associée.
On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ la base canonique de E.
Enfin, on définit l'application f sur E par :

$$f\colon P \longmapsto (X - X^2)P'' + (1-2X)P'.$$

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

- Montrons tout d'abord que f est à valeurs dans E. Soit $P \in E$. En particulier $\deg(P) \leqslant n$. On a alors $\deg(P') \leqslant n-1$ et $\deg(P'') \leqslant n-2$. Ainsi $\deg\Big((X-X^2)P''\Big) \leqslant n$ et $\deg\Big((1-2X)P'\Big) \leqslant n$. Finalement, $\deg\big(f(P)\big) \leqslant n$, *i.e.* $f(P) \in E$.
- Montrons maintenant que f est linéaire. Soient P, $Q \in E$ et λ, $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(\lambda P + \mu Q) &= (X-X^2)(\lambda P + \mu Q)'' + (1-2X)(\lambda P + \mu Q)' \\
&= (X-X^2)(\lambda P'' + \mu Q'') + (1-2X)(\lambda P' + \mu Q') \\
&= \lambda\Big[(X-X^2)P'' + (1-2X)P'\Big] + \mu\Big[(X-X^2)Q'' + (1-2X)Q'\Big] \\
&= \lambda f(P) + \mu f(Q) \quad \text{donc } f \text{ est linéaire.}
\end{aligned}$$

- On a ainsi démontré que $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E}$.

Q2. Calculer $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^k)$ pour $k \in [\![2\,;n]\!]$. Déterminer ensuite la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E.

On a immédiatement $\boxed{f(1) = 0 \text{ et } f(X) = 1-2X}$.
Soit maintenant $k \in [\![2\,;n]\!]$. On a

$$\begin{aligned}
f(X^k) &= (X-X^2)k(k-1)X^{k-2} + (1-2X)kX^{k-1} \\
&= k(k-1)X^{k-1} - k(k-1)X^k + kX^{k-1} - 2kX^k \\
&= \boxed{(-k^2-k)X^k + k^2X^{k-1}}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & -2 & 4 & \ddots & & \vdots \\
0 & \ddots & -6 & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & n^2 \\
0 & & \dots & & 0 & -n^2-n
\end{pmatrix}$$

Q3. On considère l'application

$$\varphi: \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x. \end{array}$$

a) Rappeler la définition d'un produit scalaire sur E.

Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

b) Montrer que φ est effectivement un produit scalaire sur E.

Symétrie : Soient P, $Q \in E$.

$$\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 Q(x)P(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(Q, P).$$

Linéarité à gauche : Soient P, Q, $R \in E$ et λ, $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q, R) &= \int_0^1 (\lambda P + \mu Q)(x)R(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda \int_0^1 P(x)R(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_0^1 Q(x)R(x)\,\mathrm{d}x \qquad \textit{linéarité intégrale} \\ &= \lambda\varphi(P, R) + \mu\varphi(Q, R). \end{aligned}$$

Linéarité à droite : Découle de la symétrie et de la linéarité à gauche.

Positivité : Soit $P \in E$. On a $\varphi(P, P) = \displaystyle\int_0^1 P(x)^2\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ comme intégrale d'une fonction positive.

Caractère défini : Soit $P \in E$ tel que $\varphi(P, P) = 0$. D'après le calcul précédent, cela revient à $\displaystyle\int_0^1 P(x)^2\,\mathrm{d}x = 0$. La fonction $x \mapsto P(x)^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle d'où, pour tout $x \in [0\,;1]$, $P(x)^2 = 0$ puis $P(x) = 0$. Le polynôme P admet donc une infinité de racines (tous les réels entre 0 et 1) donc nécessairement $P = 0_E$.

Par la suite, on pourra noter $\langle P \mid Q \rangle$ au lieu de $\varphi(P, Q)$. La norme associée à φ sera notée $\|\cdot\|$.

Partie II - Étude du cas $n = 2$

Dans cette partie, on prend $n = 2$. On a donc $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.
E est muni du produit scalaire φ défini en **Q3b**.

Q4. Soit A_2 la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E. Montrer que :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

D'après **Q2**, on a déjà $f(1) = 0$, $f(X) = 1 - 2X$ et le cas $k = 2$ du calcul de $f(X^k)$ donne $f(X^2) = -6X^2 + 4X = 0 + 4X - 6X^2$. En écrivant ces résultats en colonnes, on obtient bien la forme souhaitée pour A_2.

Q5. L'endomorphisme f est-il bijectif ?

La matrice A_2 n'est pas inversible car sa première colonne est nulle donc $\boxed{f \text{ n'est pas bijectif}}$.

Q6. Préciser les valeurs propres de f. Peut-on, à ce stade, conclure à la diagonalisabilité de f ?

- La matrice A_2, qui est la matrice de f dans la base canonique, est triangulaire supérieure donc les valeurs propres de f se trouvent sur la diagonale. Ainsi $\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{0, -2, -6\}}$.
- Comme f admet trois valeurs propres distinctes et opère sur $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3, on en déduit que $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$.

Q7. Déterminer des bases des sous-espaces propres de f (le terme de degré 0 de chaque vecteur des bases sera pris égal à 1).

- $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-6}(A_2) \iff A_2 Y = -6Y \iff \begin{cases} y = -6x \\ -2y + 4z = -6y \\ -6z = -6z \end{cases} \iff \begin{cases} y = -6x \\ z = -y = 6x \end{cases}$ Ainsi $E_{-6}(A_2) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix})$ et donc $\boxed{E_{-6}(f) = \mathrm{Vect}(1 - 6X + 6X^2)}$.
- Par des calculs analogues, on obtient $\boxed{E_{-2}(f) = \mathrm{Vect}(1 - 2X)}$ et $\boxed{E_0(f) = \mathrm{Vect}(1)}$.

Dans les trois cas, le polynôme donné dans le Vect forme une base de l'espace propre correspondant car il s'agit d'un vecteur non nul.

Q8. **a)** Déterminer une matrice P inversible telle que :

$$A_2 = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ avec } \alpha > \beta > \gamma.$$

Préciser les valeurs de α, β et γ.

D'après les deux questions précédentes, on a $\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}$.

b) Calculer P^{-1}.

Via la méthode usuelle avec le pivot de Gauss, $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

Q9. On considère maintenant les polynômes :

$$L_0 = 1, \quad L_1 = 1 - 2X, \quad L_2 = 1 - 6X + 6X^2.$$

a) Montrer que $\mathcal{L} = (L_0, L_1, L_2)$ est une base orthogonale de E. On rappelle que E est muni du produit scalaire φ étudié dans la partie I.

- Montrons d'abord qu'il s'agit d'une famille orthogonale.

$\langle L_0 \mid L_1 \rangle = \displaystyle\int_0^1 1 - 2x \,\mathrm{d}x = \Big[x - x^2\Big]_0^1 = 1 - 1 = 0.$

$\langle L_0 \mid L_2 \rangle = \displaystyle\int_0^1 1 - 6x + 6x^2 \,\mathrm{d}x = \Big[x - 3x^2 + 2x^3\Big]_0^1 = 1 - 3 + 2 = 0.$

$\langle L_1 \mid L_2 \rangle = \displaystyle\int_0^1 (1-2x)(1-6x+6x^2) \,\mathrm{d}x = \int_0^1 1 - 8x + 18x^2 - 12x^3 \,\mathrm{d}x = \Big[x - 4x^2 + 6x^3 - 3x^4\Big]_0^1 = 0.$

- D'après les calculs précédents $\boxed{\text{la famille } \mathcal{L} \text{ est orthogonale}}$. Comme de plus ses éléments sont non nuls, on en déduit que cette famille est libre (résultat de cours). Enfin, elle est composée de 3 vecteurs et $\dim(E) = 3$ donc $\boxed{\mathcal{L} \text{ est une base de } E}$.

b) Calculer $\|L_0\|$ et $\|L_1\|$.

On a $\|L_0\|^2 = \langle L_0 \mid L_0 \rangle = \int_0^1 1 \, \mathrm{d}x = 1$ donc $\boxed{\|L_0\| = 1}$ et

$$\|L_1\|^2 = \int_0^1 (1-2x)^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^1 1 - 4x + 4x^2 \, \mathrm{d}x = \left[x - 2x^2 + \tfrac{4}{3}x^3\right]_0^1 = 1 - 2 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

donc $\boxed{\|L_1\| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$.

c) Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$.

D'après la question **Q9a**, la famille (L_0, L_1) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_1[X]$. Il suffit alors de rendre ces deux vecteurs unitaires en les divisant par leur norme respective, calculée à la question précédente. Ainsi $\boxed{(1, \sqrt{3}(1-2X)) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}_1[X]}$.

d) Rappeler la définition de Π_1, projection orthogonale de E sur $\mathbb{R}_1[X]$. Soit $P_2 = X^2$. Exprimer $\Pi_1(P_2)$ en fonction de L_0, L_1 et L_2.
On demande ici de faire explicitement les calculs.

- La projection orthogonale Π_1 de E sur $\mathbb{R}_1[X]$ est l'endomorphisme qui à tout vecteur de E lui associe sa composante selon $\mathbb{R}_1[X]$ dans la décomposition $E = \mathbb{R}_1[X] \oplus \mathbb{R}_1[X]^\perp$. *(Ne pas hésiter à faire un schéma pour illustrer.)*
- Comme d'après **Q9c**, $(1, \sqrt{3}(1-2X))$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$, d'après le cours

$$\begin{aligned}\Pi_1(X^2) &= \left\langle X^2 \mid 1 \right\rangle 1 + \left\langle X^2 \mid \sqrt{3}(1-2X) \right\rangle \sqrt{3}(1-2X) \\ &= \left\langle X^2 \mid 1 \right\rangle 1 + 3\left\langle X^2 \mid 1-2X \right\rangle (1-2X)\end{aligned}$$

linéarité à droite

Or $\langle X^2 \mid 1 \rangle = \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \dfrac{1}{3}$
et $\langle X^2 \mid 1-2X \rangle = \int_0^1 x^2(1-2x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 - 2x^3 \, \mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^4\right]_0^1 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{-1}{6}$. Ainsi

$$\Pi_1(X^2) = \frac{1}{3} + 3\Big(-\frac{1}{6}\Big)(1-2X) = \boxed{-\frac{1}{6} + X}.$$

e) Montrer que la distance de P_2 au plan vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ vérifie :

$$d(P_2, \mathbb{R}_1[X]) = \frac{1}{6\sqrt{5}}.$$

D'après le cours, $d(P_2, \mathbb{R}_1[X]) = \|X^2 - \Pi_1(X^2)\| \overset{\textbf{Q9d}}{=} \left\|X^2 - X + \dfrac{1}{6}\right\|$. Or

$$\left\|X^2 - X + \frac{1}{6}\right\| = \int_0^1 \Big(x^2 - x + \frac{1}{6}\Big)^2 \mathrm{d}x \quad = \int_0^1 x^4 + x^2 + \frac{1}{36} - 2x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x \, \mathrm{d}x = \ldots = \frac{1}{5 \times 36}.$$

Finalement $\boxed{d(P_2, \mathbb{R}_1[X]) = \sqrt{\dfrac{1}{5 \times 36}} = \dfrac{1}{6\sqrt{5}}}$.
Remarque : pour cette question, un schéma est bienvenu et valorisé.

Exercice 2.
Pour l'ensemble de l'exercice, on considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^3)^n}\,\mathrm{d}t.$$

Q10. Calculs préliminaires

a) Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ \frac{1}{1+t^3} = \frac{a}{1+t} + \frac{b(2t-1)}{t^2-t+1} + \frac{c}{t^2-t+1}.$$

On part du membre de droite et on met au même dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{a}{1+t} + \frac{b(2t-1)}{t^2-t+1} + \frac{c}{t^2-t+1} &= \frac{a(t^2-t+1)+b(2t-1)(1+t)+c(1+t)}{(1+t)(t^2-t+1)}\\ &= \frac{a(t^2-t+1)+b(2t^2+t-1)+c(1+t)}{(1+t)(t^2-t+1)}\\ &= \frac{(a+2b)t^2+(-a+b+c)t+(a-b+c)}{1+t^3}\end{aligned}$$

Par identification avec $\dfrac{1}{1+t^3}$, on obtient le système

$$\begin{cases} a+2b=0\\ -a+b+c=0\\ a-b+c=1\end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2+L_3}{\iff}} \begin{cases} a+2b=0\\ 2c=1\\ -3b+c=1\end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} a=1/3\\ b=-1/6\\ c=1/2\end{cases}}$$

b) Soit la fonction $\Phi\colon t \mapsto \arctan\left(\dfrac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)$. Calculer sa dérivée.

La fonction Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont.
En utilisant $(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi'(t) = \frac{2/\sqrt{3}}{1+\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3+(2t-1)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{4t^2-4t+4} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{t^2-t+1}}.$$

c) En utilisant les questions précédentes, montrer que $u_1 = \alpha \ln(2) + \beta\pi$. Préciser les valeurs de α et β.

On a

$$\begin{aligned} u_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} &\overset{\text{Q10a}}{=} \int_0^1 \frac{1}{3}\frac{1}{1+t} - \frac{1}{6}\frac{(2t-1)}{t^2-t+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t\\ &\overset{\text{Q10b}}{=} \left[\frac{1}{3}\ln|1+t| - \frac{1}{6}\ln|t^2-t+1| + \frac{\Phi(t)}{\sqrt{3}}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{\Phi(1)}{\sqrt{3}} - \frac{\Phi(0)}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Or $\Phi(1) = \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$ et $\Phi(0) = \arctan\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ par imparité de arctan, d'où $\Phi(0) = -\Phi(1) = \dfrac{-\pi}{6}$. D'où

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \\ &= \boxed{\frac{1}{3}\ln(2) + \frac{1}{3\sqrt{3}}\pi, \quad \textit{i.e.} \text{ le résultat attendu avec } \alpha = \frac{1}{3} \text{ et } \beta = \frac{1}{3\sqrt{3}}}. \end{aligned}$$

Q11. Étude de la suite (u_n)

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [0\,;1]$, on a $t^3 \geqslant 0$ donc $1 + t^3 \geqslant 1$ puis $\left(1+t^3\right)^n \geqslant 1$. On passe alors à l'inverse : $\dfrac{1}{\left(1+t^3\right)^n} \leqslant 1$. D'autre part, on a évidemment $\dfrac{1}{\left(1+t^3\right)^n} \geqslant 0$. Par croissance de l'intégrale, on obtient $\displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^3\right)^n} \leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{d}t$, d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1}$.

b) Montrer que la suite (u_n) est monotone.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{1}{\left(1+t^3\right)^{n+1}} - \frac{1}{\left(1+t^3\right)^n}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{\left(1+t^3\right)^n}}_{\geqslant 0} \underbrace{\left(\frac{1}{1+t^3} - 1\right)}_{\leqslant 0} \mathrm{d}t \\ &\leqslant 0 \quad \text{donc } \boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante}}. \end{aligned}$$

c) Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ que l'on ne demande pas de calculer.

C'est une question de cours ! D'après les deux questions précédentes, la suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0) donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente vers une limite } \ell \in \mathbb{R}}$.

Q12. Étude de la série $\sum u_n$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0\,;1]$, $\dfrac{1}{(1+t)^n} \leqslant \dfrac{1}{\left(1+t^3\right)^n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [0\,;1]$, on a $t \geqslant t^3$ puis $1+t \geqslant 1+t^3$ et donc $(1+t)^n \geqslant \left(1+t^3\right)^n$. En passant à l'inverse, on obtient $\boxed{\dfrac{1}{(1+t)^n} \leqslant \dfrac{1}{\left(1+t^3\right)^n}}$.

b) Établir le résultat : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^n}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^n}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1+t)^{-n}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{n+1}(1+t)^{-n-1}\right]_0^1 = -\frac{\frac{1}{2^{n+1}} - 1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \boxed{\frac{1}{n}}.$$

c) En déduire la nature de la série numérique $\sum u_n$.

Comme la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ est divergente, d'après la question précédente, par équivalence de séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^n}\,\mathrm{d}t$ est divergente. D'après **Q12a** et par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ est divergente}}$.

Q13. Étude de la série $\sum \dfrac{u_n}{n}$

a) En écrivant $\dfrac{1}{\left(1+t^3\right)^n} = \dfrac{1}{\left(1+t^3\right)^n} \cdot 1$, effectuer une intégration par parties dans l'expression de u_n et montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_n = a_n + b_n(u_n - u_{n+1}).$$

Identifier les expressions de a_n et de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u = \dfrac{1}{\left(1+t^3\right)^n} = \left(1+t^3\right)^{-n}$ et $v' = 1$ d'où $u' = \dfrac{-3nt^2}{\left(1+t^3\right)^{n+1}}$ et $v = t$. Les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;1]$, par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}
u_n &= \left[\frac{t}{\left(1+t^3\right)^n}\right]_0^1 + 3n\int_0^1 \frac{t^3}{\left(1+t^3\right)^{n+1}}\,\mathrm{d}t && +1-1 \\
&= \frac{1}{2^n} - 0 + 3n\int_0^1 \frac{1+t^3-1}{\left(1+t^3\right)^{n+1}}\,\mathrm{d}t && \textit{linéarité intégrale} \\
&= \frac{1}{2^n} + 3n\left(\int_0^1 \frac{\cancel{1+t^3}}{\left(1+t^3\right)^{n+\cancel{1}}}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{1}{\left(1+t^3\right)^n}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \boxed{\frac{1}{2^n} + 3n(u_n - u_{n+1})},
\end{aligned}$$

d'où le résultat souhaité avec $\boxed{a_n = \frac{1}{2^n} \text{ et } b_n = 3n}$.

b) En utilisant le développement en série entière de $\ln(1-x)$, établir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n2^n}$ et montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln(2)$.

D'abord, on sait que $\boxed{\forall x \in \left]-1\,;1\right[,\ \ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}}$.

En particulier, pour $x = \frac{1}{2} \in \left]-1\,;1\right[$, on obtient la $\boxed{\text{convergence de la série } \sum \dfrac{(1/2)^n}{n} = \sum \dfrac{1}{n2^n}}$ et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\ln\frac{1}{2} = \boxed{\ln 2}.$$

c) Déduire des questions **Q13a** et **Q13b** que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{n}$ converge et calculer sa somme. On exprimera le résultat en fonction de ℓ défini à la question **Q11c**.

D'abord, d'après **Q13a**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{u_n}{n} = \dfrac{1}{n2^n} + 3(u_n - u_{n+1})$.

D'après la question précédente, $\dfrac{1}{n2^n}$ est le terme général d'une série convergente.
De plus, $u_n - u_{n+1}$ est le terme général d'une série télescopique convergente car la suite (u_n) est convergente d'après **Q11c** (refaire le télescopage si nécessaire).

Par linéarité, on en déduit que $\boxed{\text{la série } \sum \frac{u_n}{n} \text{ est convergente}}$. Enfin,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} + 3\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n - u_{n+1}) && \textit{Q13b + télescopage et Q11c} \\
&= \ln(2) + 3(u_1 - \ell) && \textit{Q10c} \\
&= \ln(2) + 3\Big(\frac{1}{3}\ln(2) + \frac{1}{3\sqrt{3}}\pi - \ell\Big) \\
&= \boxed{2\ln(2) + \frac{\pi}{\sqrt{3}} - 3\ell}.
\end{aligned}$$

Q14. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que la suite (v_n) est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^3)^n}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$. De plus on a $\dfrac{1}{(1+t^3)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{3n}}$. Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3n}}$ est convergente en $+\infty$ (car $3n > 1$) donc par équivalence de fonctions positives, on en déduit que $\boxed{\text{l'intégrale définissant } v_n \text{ est convergente}}$.

b) En utilisant les résultats des questions **Q10a** et **Q10b**, déterminer la valeur de v_1.

D'après la question précédente, v_1 est convergente. On pose $X > 0$ et on procède de manière analogue à **Q10c** :

$$\begin{aligned}
\int_0^X \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} &\overset{\text{Q10a}}{=} \int_0^X \frac{1}{3}\frac{1}{1+t} - \frac{1}{6}\frac{(2t-1)}{t^2-t+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Q10b}}{=} \left[\frac{1}{3}\ln|1+t| - \frac{1}{6}\ln|t^2-t+1| + \frac{\Phi(t)}{\sqrt{3}}\right]_0^X \\
&= \frac{1}{3}\ln(1+X) - \frac{1}{6}\ln(X^2-X+1) + \frac{\Phi(X)}{\sqrt{3}} - \frac{\Phi(0)}{\sqrt{3}} \\
&= \ln\left(\frac{(1+X)^{1/3}}{(X^2-X+1)^{1/6}}\right) + \frac{\Phi(X)}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{(1+X)^{1/3}}{(X^2-X+1)^{1/6}} \underset{X\to+\infty}{\sim} \dfrac{X^{1/3}}{X^{2/6}} = 1$ donc le premier terme tend vers 0 lorsque X tend vers $+\infty$.

De plus, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \Phi(X) = \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^X \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0 + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{6\sqrt{3}}$, *i.e.* $\boxed{v_1 = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$.

c) En comparant les termes généraux u_n et v_n pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la nature de la série $\sum v_n$.

Par positivité de $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^3)^n}$ sur $[0\,;+\infty[$, on a $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Or d'après **Q12c**, la série $\sum u_n$ est divergente donc par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum v_n \text{ est divergente}}$.

d) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} v_n.$$

On pourra utiliser une intégration de par parties similaire à celle de la question **Q13a**.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X > 0$. On pose $\begin{cases} u = \frac{1}{(1+t^3)^n} \\ v' = 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} u' = \frac{-3nt^2}{(1+t^3)^{n+1}} \\ v = t \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;X]$. Par intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^X \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} &= \left[\frac{t}{(1+t^3)^n}\right]_0^X + 3n\int_0^X \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\ &\overset{\text{coup du cowboy}}{=} \frac{X}{(1+X^3)^n} + 3n\int_0^X \frac{(t^3+1)-1}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\ &\overset{\text{linéarité intégrale}}{=} \frac{X}{(1+X^3)^n} + 3n\left(\int_0^X \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} - \int_0^X \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^{n+1}}\right).\end{aligned}$$

D'une part, on a $\dfrac{X}{(1+X^3)^n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{X}{X^{3n}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{X^{3n-1}} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$. D'autre part, lorsque X tend vers $+\infty$, les trois intégrales sont convergentes d'après **Q14a**.

On obtient ainsi $v_n = 3n(v_n - v_{n+1})$, ce qui se réécrit $\boxed{v_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n} v_n}$.

e) En déduire le résultat :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\,;1\},\ v_n = \frac{2\times 5\times\cdots\times(3n-4)}{3^n\times(n-1)!}\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Procédons par récurrence.

Propriété à démontrer : pour $n \geqslant 2$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $v_n = \dfrac{2\times 5\times\cdots\times(3n-4)}{3^n\times(n-1)!}\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$ ».

Initialisation : D'une part, d'après la question précédente et **Q14b**, on a $v_2 = \dfrac{3-1}{3}\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \dfrac{4\pi}{9\sqrt{3}}$.

D'autre part, $\dfrac{2}{3^2 1!}\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}} = \dfrac{4\pi}{9\sqrt{3}}$ donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 2$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} \overset{\text{Q14d}}{=} \frac{3n-1}{3n}v_n \overset{\mathcal{P}(n)}{=} \frac{2\times 5\times\cdots\times(3n-4)}{3^n(n-1)!}\frac{3n-1}{3n}\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \\ \overset{3n-1=3(n+1)-4}{=} \frac{2\times 5\times\cdots\times(3n-4)(3(n+1)-4)}{3^{n+1}n!}\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

i.e. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a montré que

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ v_n = \frac{2\times 5\times\cdots\times(3n-4)}{3^n\times(n-1)!}\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}.$$

Exercice 3. (*d'après CCINP TPC 2022*)
Les questions **Q17** à **Q19** peuvent être traitées dans avoir abordée les questions **Q15** et **Q16**.

Soit $p \in]0\,;1[$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $q = 1 - p$.
Une entreprise dispose de N machines identiques en service. Chaque machine a, chaque jour, une probabilité égale à p de tomber en panne, indépendamment des autres. Lorsqu'une machine tombe en panne, elle est retirée définitivement du service.
Au jour numéro 0, toutes les machines sont en service.

Pour $i \in [\![1\,;N]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au numéro du jour où la i-ème machine tombe en panne.

Q15. a) Justifier que X_1 suit la loi géométrique de paramètre p notée $\mathscr{G}(p)$.
Préciser l'univers-image $X_1(\Omega)$ et pour $k \in X_1(\Omega)$, $P(X_1 = k)$.
Donner enfin l'espérance de X_1.

La variable aléatoire X_1 correspond au **rang du premier succès** (tomber en panne) lors de répétitions indépendantes de la même expérience aléatoire, le succès ayant à chaque fois une probabilité p de se produire. Ainsi $\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathscr{G}(p)}$.

En particulier $\boxed{X_1(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X_1 = k) = p(1-p)^{k-1} = pq^{k-1}}$ et $\boxed{E(X_1) = \dfrac{1}{p}}$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $P(X_1 > k) = q^k$. En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{X_1>n}(X_1 > k+n) = P(X_1 > k).$$

Pourquoi peut-on dire que la loi de X_1 est sans mémoire ?

- On écrit $(X_1 > k) = \displaystyle\bigcup_{i=k+1}^{+\infty} (X_1 = i)$, les événements de cette union étant deux à deux incompatibles. Alors par incompatibilité puis somme d'une série géométrique de raison $|q| < 1$, on a

$$P(X_1 > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X_1 = i) \overset{\text{Q15a}}{=} \sum_{i=k+1}^{+\infty} pq^{i-1} = p \times q^k \frac{1}{1-q} = \boxed{q^k} \quad (\text{car } q = 1-p).$$

- Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P_{X_1>n}(X_1 > k+n) &= \frac{P((X_1 > k+n) \cap (X_1 > n))}{P(X_1 > n)} \\ &= \frac{P(X_1 > k+n)}{P(X_1 > n)} \overset{\text{Q15b}}{=} \frac{q^{k+n}}{q^n} = q^k = \boxed{P(X > k)}. \end{aligned}$$

- Le calcul précédent montre que la machine numéro 1 a la même probabilité de tenir k jours que de tenir $k+n$ jours sachant qu'elle a déjà tenu n jours, *i.e.* de tenir k jours de plus après avoir déjà tenu n jours. On peut ainsi dire que la loi de X_1 est sans mémoire puisque savoir ou non qu'elle a déjà tenu n jours n'influe pas sur la probabilité de tenir k jours de plus.

Toutes les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont donc indépendantes et suivent la même loi géométrique de paramètre p.
On pose pour la suite de l'exercice $Y = \max\{X_1, \ldots, X_N\}$.

Q16. a) Expliquer pourquoi la variable aléatoire Y désigne le numéro du jour où la machine la plus robuste tombe en panne.
Préciser l'univers image $Y(\Omega)$.

L'événement $Y = k$ signifie qu'une des variables aléatoires X_i vaut k et les autres sont inférieures ou égales à k. Autrement dit, cela signifie qu'une des machines est tombée en panne le k-ème jour et que les autres sont tombées en panne avant. Ainsi Y correspond bien au jour où une dernière machine, la plus robuste, tombe en panne.
Par ailleurs, $\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}^*}$ en tant que maximum de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier brièvement que

$$(Y \leqslant k) = \bigcap_{i=1}^{N} (X_i \leqslant k),$$

puis montrer que $P(Y \leqslant k) = (1 - q^k)^N$.

Comme $Y = \max\{X_1, \ldots, X_N\}$, l'événement $Y \leqslant k$ est réalisé si et seulement $X_i \leqslant k$ est réalisé pour tout $i \in [\![1\,;N]\!]$. Autrement dit $(Y \leqslant k) = \bigcap_{i=1}^{N} (X_i \leqslant k)$.
Ensuite on a, pour tout $i \in [\![1\,;N]\!]$, $P(X_i \leqslant k) = 1 - P(X_i > k) \overset{\textbf{Q15b}}{=} 1 - q^k$. Ainsi, par indépendance des X_i, on obtient

$$P(Y \leqslant k) = P\left(\bigcap_{i=1}^{N} (X_i \leqslant k)\right) = \prod_{i=1}^{N} P(X_i \leqslant k) = \prod_{i=1}^{N} (1 - q^k) = \boxed{(1 - q^k)^N}.$$

c) Pour $k \in \mathbb{N}$, justifier que $P(Y \leqslant k - 1) + P(Y = k) = P(Y \leqslant k)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On peut écrire $(Y \leqslant k) = (Y < k) \cup (Y = k) = (Y \leqslant k - 1) \cup (Y = k)$. Comme il s'agit d'une union d'événements incompatibles, on en déduit

$$\boxed{P(Y \leqslant k) = P(Y \leqslant k - 1) + P(Y = k)}.$$

d) Soit $k \in Y(\Omega)$, déduire de la question **Q16c** l'expression de $P(Y = k)$ en fonction des paramètres q, k et N.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} P(Y = k) &\overset{\textbf{Q16c}}{=} P(Y \leqslant k) - P(Y \leqslant k - 1) \\ &\overset{\textbf{Q16b}}{=} \boxed{(1 - q^k)^N - (1 - q^{k-1})^N}. \end{aligned}$$

Q17. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - (1 - q^n)^N$.

a) Déterminer un équivalent de $(1 + x)^N - 1$ lorsque x tend vers 0.
En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

On a $(1 + x)^N - 1 \underset{x \to 0}{=} 1 + Nx + o(x) - 1 = Nx + o(x) \underset{x \to 0}{\sim} \boxed{Nx}$.
Comme $q \in \,]0\,;1[$, on a $-q^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, on peut donc utiliser l'équivalent précédent pour obtenir l'équivalent $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} -N(-q^n) = Nq^n}$.

b) Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est convergente.

Comme $|q| < 1$, la série géométrique $\sum q^n$ est convergente donc, par équivalence de séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ est convergente}}$.

On admet, pour toute la suite de l'exercice, que l'on a : $E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

c) Lorsque $N = 2$, calculer $E(Y)$.

Comme $N = 2$, on a $u_n = 1 - (1 - q^n)^2 = 1 - (1 - 2q^n + q^{2n}) = 2q^n - q^{2n}$. Par somme de séries géométriques convergentes, on a

$$E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} q^n - \sum_{n=0}^{+\infty} q^{2n} = 2\frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q^2} = \frac{2(1+q)}{1-q^2} - \frac{1}{1-q^2} = \boxed{\frac{1+2q}{1-q^2}}.$$

On cherche maintenant à déterminer un équivalent de $E(Y)$ *lorsque* $N \to +\infty$.

Q18. Soit f la fonction définie que $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 1 - (1 - q^x)^N$.

a) Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} Nq^x$. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente. *On rappelle que pour* $x \in \mathbb{R}$, $q^x = \mathrm{e}^{x\ln q}$.

- On a $q^x = \mathrm{e}^{x\ln q} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ car $\ln q < 0$ puisque $q \in]0\,;1[$. Par un calcul analogue à celui de **Q17a**, on obtient $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} Nq^x}$.
- Étudions maintenant la nature de l'intégrale. La fonction f est continue sur $[0\,;+\infty[$. Par le premier point, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} Nq^x = N\,\mathrm{e}^{x\ln q}$. Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{x\ln q}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale de référence convergente car $\ln q < 0$. Par équivalence de fonctions positives, on en déduit que $\boxed{\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ est convergente}}$.

b) **i)** À l'aide d'une suite géométrique, montrer que :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[,\ f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} q^x(1-q^x)^k.$$

Soit $x \in]0\,;+\infty[$. On part du membre de droite où l'on reconnaît une somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^{N-1} q^x(1-q^x)^k = q^x\frac{1-(1-q^x)^N}{1-(1-q^x)} = q^x\frac{1-(1-q^x)^N}{q^x} = 1 - (1-q^x)^N = f(x).$$

ii) Soit $k \in [\![0\,;N-1]\!]$.
À l'aide du changement de variable $t = q^x$, calculer $\int_0^{+\infty} q^x(1-q^x)^k\,\mathrm{d}x$.
En déduire que $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\ln q}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$.

- On pose $t = q^x = \mathrm{e}^{x\ln q} \iff x = \frac{\ln t}{\ln q}$ donc $\mathrm{d}x = \frac{1}{t\ln q}$. Par changement de variable, on obtient

$$\int_0^{+\infty} q^x(1-q^x)^k\,\mathrm{d}x = \int_1^0 t(1-t)^k\frac{1}{t\ln q}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{\ln q}\int_0^1(1-t)^k\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\int_0^1 (1-t)^k\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(1-t)^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}.$$

D'où finalement

$$\boxed{\int_0^{+\infty} q^x(1-q^x)^k\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{\ln q}\times\frac{1}{k+1}}.$$

- Ensuite

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &\overset{\text{i)}}{=} \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} q^x\left(1-q^x\right)^k \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^{+\infty} q^x\left(1-q^x\right)^k \mathrm{d}x \\
&= \frac{-1}{\ln q} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k+1} \\
&= \boxed{\frac{-1}{\ln q} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j}}
\end{aligned}$$

linérarité intégrale

question précédente

$j = k+1$

c) i) Justifier que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions qui le sont.
Pour tout $x \geqslant 0$, on a $\left(q^x\right)' = \left(\mathrm{e}^{x\ln q}\right)' = \ln(q)\,\mathrm{e}^{x\ln q} = \ln(q)q^x$ donc

$$f'(x) = -N \times \left(-\ln(q)q^x\right)\left(1-q^x\right)^{N-1} = N\underbrace{\ln(q)}_{\leqslant 0}\underbrace{q^x\left(1-q^x\right)^{N-1}}_{\geqslant 0} \leqslant 0.$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+}$.

ii) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant u_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc en particulier sur $[n\,;n+1]$. Ainsi, pour tout x dans cet intervalle, $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$. En intégrant, on obtient

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}x,\ \textit{i.e.}\ f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(n).$$

Or $f(n) = 1 - \left(1-q^n\right)^N = u_n$ et de même $f(n+1) = u_{n+1}$.

Finalement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant u_n}$.

iii) En déduire que : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=0}^{N} u_n \leqslant \int_0^{N} f(x)\,\mathrm{d}x + 1$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En sommant l'inégalité précédente de $n=0$ à N, il vient

$$\sum_{n=0}^{N} u_{n+1} \leqslant \sum_{n=0}^{N} \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

Par glissement d'indice à gauche et relation de Chasles au milieu, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N+1} u_n \leqslant \int_0^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

L'inégalité de droite ici correspond à celle de gauche souhaitée.

Maintenant, prenons l'inégalité de gauche précédente en $N-1$ au lieu de N :

$$\sum_{n=1}^{N} u_n \leqslant \int_0^N f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \text{Or } \sum_{n=1}^{N} u_n = -u_0 + \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

Comme $u_0 = 1$, on obtient finalement la seconde inégalité attendue.

iv) Conclure enfin que :

$$-\frac{1}{\ln q}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} \leqslant E(Y) \leqslant 1 - \frac{1}{\ln q}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}.$$

Comme d'après **Q18a**, l'intégrale de f est convergente en $+\infty$ et d'après **Q17b**, la série des u_n est convergente, on peut faire tendre N vers $+\infty$ dans les inégalités précédentes, ce qui donne :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Par définition de $E(Y)$ donnée dans l'énoncé et la valeur de l'intégrale calculée en **ii)**, on obtient

$$\boxed{-\frac{1}{\ln q}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} \leqslant E(Y) \leqslant 1 - \frac{1}{\ln q}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}}.$$

Q19. On admet le résultat classique $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln N$.

Déterminer un équivalent simple de $E(Y)$ lorsque N tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat obtenu pour les machines de l'entreprise.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$. En divisant par $\dfrac{-H_N}{\ln q} > 0$ chaque membre de l'inégalité obtenue dans la question précédente, il vient

$$1 \geqslant -\frac{\ln q}{H_N}E(Y) \leqslant -\frac{\ln q}{H_N} + 1.$$

Comme $H_N \underset{+\infty}{\sim} \ln N \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$, on a $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} -\frac{\ln q}{H_N} + 1 = 1$. D'après le théorème des gendarmes appliqué à l'encadrement précédent, on obtient $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} -\frac{\ln q}{H_N}E(Y) = 1$, *i.e.* $\boxed{E(Y) \underset{N\to+\infty}{\sim} -\frac{H_N}{\ln q} \sim -\frac{\ln N}{\ln q}}$.

En particulier, on a $E(Y) \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$, ce qui signifie que si l'entreprise dispose d'un très grand nombre de machines, la machine la plus robuste tombera en moyenne en panne au bout d'un temps infini, autrement dit elle ne tombera pas en panne.